実数の集合論とランダムネス : 概説 (証明論と複雑性)

AUTHOR(S):

木原, 貴行

数理解析研究所講究録
第 1832 巻 2013 年 97-113

実数の集合論とランダムネス（概説）

木原貴行*
kihara.takayuki.logic@gmail.com
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1 導入

アルゴリズム的ランダム性の理論 ([19, 36]) は，“空間の一点に対する測度” に関する熟思によって甚大な発展を遂げた．本序節では，あくまで非形式的なアイデアとして，小世界 $\mathcal{W}$ とそれを内包する大世界 $\mathcal{V} \supset \mathcal{W}$ を思い描いてほしい．これらの世界を ZFC 集合論のモデルとそのジェネリック拡大あるいは逆に内部モデルという関係であると考えてもよいし，もっと小さな箱庭的世界を思い浮かべてもよい．大世界 $\mathcal{V}$ の実数 $x \in (2^{\omega})^{\mathcal{V}}$ が小世界 $\mathcal{W}$ で設計された如何なる測度零 G_{δ} 集合によっても捕捉されない[*1]とき，一点集合 $\{x\}$ は $\mathcal{W}$ **から見て正測度**であり，実数 x は $\mathcal{W}$ **から見てランダム**であると考えられる．ランダム性の理論の一側面を非形式的に要約すれば，それは大世界 $\mathcal{V}$ の実数の一点集合を小世界 $\mathcal{W}$ で設計される測度論を用いて分類する理論である．

アルゴリズム的ランダム性の理論においては，全てでは無いが，小世界として，計算可能性の世界 $\mathcal{R}$ を用いることが多々ある．この理由は，情報圧縮の理論との結び付きであろう．また，計算可能性や不可能性の階層構造を駆使するため，小世界に相当する概念を多数同時に用いることもある．一方で，大世界とは，通常の数学的活動を行うのに十分な世界，あるいは通常の数学者の思い浮かべる数学の世界である．換言すれば，大世界の正体が形式的に如何なるものであるかは全く意識されないし，多くの場合はその必要も無い．以後，$K(\sigma)$ によって有限列 $\sigma \in 2^{<\omega}$ の**接頭コルモゴロフ複雑性** (*prefix-free Kolmogorov complexity*) を表す．アルゴリズム的ランダム性の理論からの基本的事実の一部を以下に挙げる．

---

* 本研究は JSPS 科研費の助成を受けたものである．

*1 ここで，$\mathcal{W}$ で設計されるとは，G_{δ} 集合の**ボレルコード** (*Borel code*) が $\mathcal{W}$ に属すことを意味し，実際の G_{δ} 集合の組み立ては，そのボレルコードを元に $\mathcal{V}$ の中で行われる．

- 無限列 $x \in 2^\omega$ が $\mathcal{R}$ から見てランダムであることと，高々定数長しか圧縮できないこと，すなわち $K(x \upharpoonright n) \geq n - O(1)$ であることは同値である ([19, Chapter 6]).
- 無限列 $x \in 2^\omega$ について，$\mathcal{R}$ から見て一点集合 $\{x\}$ の**ハウスドルフ次元** (*Hausdorff dimension*) が s であることと，圧縮率の下極限が s であること，すなわち

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{K(x \upharpoonright n)}{n} = s$$

  であることは同値である ([19, Chapter 13]).
- 無限列 $x \in 2^\omega$ について，$\mathcal{R}$ から見て一点集合 $\{x\}$ の**梱包次元** (*packing dimension*) が s であることと，圧縮率の上極限が s であること，すなわち

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{K(x \upharpoonright n)}{n} = s$$

  であることは同値である ([19, Chapter 13]).

このように，大世界の実数の一点集合の小世界での測度論的振る舞いを注視することにより，その実数の持つランダム性あるいはコルモゴロフ複雑性の極限的挙動を測定することが可能となる．ところで，情報圧縮を取り扱う際，ランダムな数列だけでなく，圧縮可能な数列に対する考察もまた不可欠である．そして，大世界 $\mathcal{V}$ の数列が十分圧縮可能であることは，それが小世界 $\mathcal{W}$ で設計された十分小さい集合で捕捉されることに他ならない．このため，ランダム性の理論においては，通常の数学的活動ではあまり考察の対象とならないような，実数の極めて小さい集合に対する理論が必要とされる．具体的には，我々が道具として用いる概念は，**強零** (*strong measure zero*) **集合**，(T')**-集合**，**痩加法的** (*meager-additive*) **集合**，**零加法的** (*null-additive*) **集合**などである．興味深いことに，ZFC 集合論では可算性と区別不可能なほど小さなこれらの集合が，素朴な情報圧縮の理論として自然な意味を持つことが分かってきた．

本稿では，実数の集合論 ([7, 13]) のランダム性の理論における役割に関して，樋口-木原 [26, 27] および木原-宮部 [30] を中心とする概説を与える．

2 小さな集合の理論

以後，空間は 2^ω を固定し，言及が無ければ，2^ω には標準的な積位相と一様測度が入っているとする．このとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ によって**痩** (*meager*) および**零** (*null*) 集合全体，$\mathcal{H}^s$ と $\mathcal{P}^s$ によってハウスドルフおよび梱包次元 s の集合全体，$\mathcal{UN}$ と $\mathcal{SN}$ によって普遍零および強零集合全体，$\mathcal{M}^+$ と $\mathcal{N}^+$ によって痩および零加法的集合全体を表す．

非形式的に，部分計算可能性の小世界として $\mathcal{R}$ および全域計算可能性の小世界として $\underline{\mathcal{R}}$ という記号を用いるが，本稿ではその意味は与えずに，各概念に対して場当たり的に $\mathcal{R}$ および $\underline{\mathcal{R}}$ への相対化を定義する．各 $\mathcal{W} \in \{\mathcal{R}, \underline{\mathcal{R}}\}$ とイデアル $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ に対し，

$$(\mathcal{I})^{\mathcal{W}} = \bigcup \mathcal{I}^{\mathcal{W}} = \text{「ある } N \in \mathcal{I}^{\mathcal{W}} \text{ によって捕捉される実数全体」}$$

と定義する．ここで，$(\mathcal{I})^{\mathcal{W}} \subseteq 2^\omega$ であり $\mathcal{I}^{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ であることに注意する．もし $\mathcal{I}^{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{I}$ と $\mathrm{card}(\mathcal{I}^{\mathcal{W}}) < \mathbf{cov}(\mathcal{I})$ が保証されれば，$(\mathcal{I})^{\mathcal{W}}$ は非自明なものとなる．

まず，$\mathcal{N}^{\mathcal{R}}$ および $\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}}$ はそれぞれ Martin-Löf 零集合および Schnorr 零集合全体を表すものとする．言い換えれば，$2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ および $2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ はそれぞれ **Martin-Löf ランダム実数** (*Martin-Löf random*) および **Schnorr ランダム実数** (*Schnorr random*) 全体の集合を表す．次に，$\mathcal{M}^{\mathcal{R}}$ および $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}$ は，それぞれ Σ^0_1 集合の境界および疎 Π^0_1 集合の一様な可算族の和として得られる集合全体を表すものとする．言い換えれば，$2^\omega \setminus (\mathcal{M})^{\mathcal{R}}$ および $2^\omega \setminus (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}}$ はそれぞれ **1-(コーエン) ジェネリック実数** (1-*generic*) および**弱 1-(コーエン) ジェネリック実数** (*weakly* 1-*generic*) 全体の集合を表す．また，$(\omega^\omega)^{\mathcal{R}}$ および $(\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}$ によって，それぞれ ω 上で部分および全域的に定義された計算可能関数全体の集合を表し，各実数 $x \in 2^\omega$ に対して，$(\omega^\omega)^{\mathcal{R}[x]}$ および $(\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]}$ によって，x を神託として相対的に計算可能な部分および全域関数全体の集合を表す．$(2^\omega)^{\mathcal{R}}$ 等も同様に定義する．

2.1 普遍零集合

実数の集合が原子を持たない任意のボレル有限測度に対して零集合であるとき，それは**普遍零** (*universal measure zero*) であると呼ばれる．以後，2^ω 上の測度 μ が与えられたとき，$\mathcal{N}_\mu$ によって μ-零集合全体を表す．μ が原子を持たないボレル確率測度ならば，明らかに $\mathcal{UN} \subseteq \mathcal{N}_\mu$ である．ランダム性の理論において最初に普遍零集合に相当する概念を活用したのは van Lambalgen [41, Section 3] であろう．確率論の黎明期に，確率概念の基礎として**コレクティーフ** (*Kollektiv*) の概念が von Mises によって提唱された．無限列 $x \in 2^\omega$ がコレクティーフであるためには，選出規則 $y \in 2^\omega$ に従って x の部分列 x/y が抽出されたとき，x/y が大数の法則を満たす必要がある．ここで，$\hat{y}(n)$ を $y(m) = 1$ なる n 番目の m とするとき，$x/y(n) = x(\hat{y}(n))$ と定義する．

定理 2.1 (van Lambalgen [41])**.** $x \in 2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ とする．このとき，集合 $\{y \in 2^\omega : x/y \in (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}\}$ は，原子を持たない任意の計算可能有限測度に対して零集合である．

換言すると，何らかの確率的装置に基づく十分にランダムな方法による部分列選出で

は，与えられたランダム列をデランダマイズできない．この結果は，後の節で見る加法によるデランダマイズに関する結果と対照的で興味深い．

ところで，普遍零集合の定義は，原子を持たない測度にのみ言及する．一方で，原子を持つ測度と原子を持たない測度の差異に関する興味深い結果がある．以下，$\mathcal{N}_\mu^{\mathcal{R}}$ によって Martin-Löf μ-零集合全体を表し，$\mathcal{UN}^{\mathcal{R}}$ によって，原子を持たない任意の計算可能有限測度 μ について Martin-Löf μ-零であることを表す．実数 x が**超免疫** (*hyperimmune*) あるいは $\mathfrak{b}^{\mathcal{R}}$ であるとは，ある $g \in (\omega^\omega)^{\mathcal{R}[x]}$ が存在して，任意の $f \in (\omega^\omega)^{\mathcal{R}}$ に対して，$g \not\leq^* f$ となることを意味する．

定理 2.2 (Bienvenu-Porter [8])**.** $x \in 2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ とする．このとき，$x \in \mathfrak{b}^{\mathcal{R}}$ であることと，以下の条件を満たす $y \in 2^\omega$ が存在することは同値である：$(2^\omega)^{\mathcal{R}[x]} = (2^\omega)^{\mathcal{R}[y]}$ であり，$y \in (\mathcal{UN})^{\mathcal{R}}$ であるにも関わらず，2^ω 上のある計算可能確率測度 μ が存在して，$y \in 2^\omega \setminus (\mathcal{N}_\mu)^{\mathcal{R}}$ となる．

ところで，ZFC のモデル $\mathcal{M}$ に 1 つのコーエン実数 $c \in 2^\omega$ を加えたジェネリック拡大 $\mathcal{M}[c]$ を考えると，そこで $\mathcal{M}$ の実数全体の集合は普遍零集合である（事実，強零集合である）．このような設定で扱われる測度は $\mathcal{M}$ ではなく $\mathcal{M}[c]$ にあるものである．ある実数 $x \in 2^\omega$ が**ネバー・ランダム** (*never continuously random*) である ([38]) とは，直観的には，原子を持たない任意のボレル有限測度 μ に対して，$x \in (\mathcal{N}_\mu)^{\mathcal{R}}$ であることを意味する．ネバー・ランダム数は無限に存在する一方，原子を持つ測度に関して注意すると，Levin の**中立測度** (*neutral measure*) は，$(\mathcal{N}_\mu)^{\mathcal{R}} = \emptyset$ なる（計算不可能な）有限測度 μ が存在することを示唆する．ただし，$\mathcal{R}$ 内に存在しない μ に言及するため，$(\mathcal{N}_\mu)^{\mathcal{R}}$ の定義には少しばかりの工夫を要する ([14, 38])．

非自明なネバー・ランダム数の例を 2 種類紹介しよう．閉集合 $P \subseteq 2^\omega$ が与えられたとき，順序数 α について，$P^{(\alpha)}$ によって P の第 α Cantor-Bendixson derivative を表す．実数 x の $\mathcal{R}$ での Cantor-Bendixson 階数とは，ある Π^0_1 集合 $P \subseteq 2^\omega$ について $x \in P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)}$ なる最小の順序数 α である．そのような α が存在するとき，x は $\mathcal{R}$ で Cantor-Bendixson 階数を持つという．無限列 $x \in 2^\omega$ が ***K*-トリビアル** (*K-trivial*) であるとは，$K(x \upharpoonright n) \leq K(0^n) + O(1)$ であることを意味する．Chaitin は全ての K-トリビアル数が $(2^\omega)^{\mathcal{R}[\emptyset']}$ に属しており，これより K-トリビアル数が可算個しか存在しないことを示した．一方，Solovay は $(2^\omega)^{\mathcal{R}[\emptyset']} \setminus (2^\omega)^{\mathcal{R}}$ が K-トリビアル数を含むことを示した．

定理 2.3 ([3, 38])**.** $\mathcal{R}$ で Cantor-Bendixson 階数を持つ任意の実数はネバー・ランダムである．また，任意の K-トリビアル数はネバー・ランダムである．

2.2 強零集合

1944 年，Emil Post は，ω の Σ^0_1 集合について，その補集合が "小さい" とき，それは中間チューリング次数を持つであろうと予想し，小ささを表す尺度として，**免疫** (*immune*)，超免疫，**超超免疫** (*hyperhyperimmune*) などの概念を導入した．ところで，ω の小さい部分集合 $x \subseteq \omega$ の主関数 $\hat{x} \in \omega^\omega$ は巨大関数となる．ある実数 $x \in 2^\omega$ が**稠密免疫** (*dense immune*) あるいは $\mathfrak{d}^{\underline{\mathcal{R}}}$ であるとは，ある $g \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]}$ が存在して，任意の $f \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}$ に対して，$f \leq^* g$ となることを意味する．先に述べたように，Post の超免疫性は $\mathfrak{b}^{\underline{\mathcal{R}}}$ を指し，超超免疫ならば $\mathfrak{d}^{\underline{\mathcal{R}}}$ である．

失敗に終わった Post の試みとは対照的に，後に Binns [9] は，"小さい" Π^0_1 集合 $P \subseteq 2^\omega$ の要素のチューリング次数が中間的になることに勘付いた．本稿の観点で見れば，小世界 $\mathcal{R}$ で設計された非常に小さな閉集合[*2] $P \subseteq 2^\omega$ によって各 $x \in P$ が捕捉されているというのがその原因である．Binns [9, 10] は "小ささ" に関する多数の概念を導入したが，そのうちの幾つかについて，木原 [29] は強零集合との類似を指摘し，幾つかの誤った予想と共に，本稿で述べるところの $\mathcal{SN}^{\mathcal{R}}$ に相当する概念のアイデアを記した．$\mathcal{SN}^{\mathcal{R}}$ の厳密な定義と，それによる Binns の概念の特徴付けは，樋口-木原 [26] による．

定義 2.1. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ に対して，

1. (Borel [12]) X が強零であるとは，次の条件を満たすことである．
$$(\forall u \in \omega^\omega)\left(\exists s \in \prod_{n\in\omega} 2^{u(n)}\right) \quad X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} [\![s(n)]\!].$$
ここで，任意の m について $X \subseteq \bigcup_{n\geq m}[\![s(n)]\!]$ としても等価である．
2. X が **$\mathcal{R}$ から見て強零**であるとは，次の条件を満たすことである．
$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})\left(\exists s \in \left(\prod_{n\in\omega} 2^{u(n)}\right)^{\mathcal{R}}\right)(\forall m \in \omega) \quad X \subseteq \bigcup_{m\leq n\in\mathrm{dom}(s)} [\![s(n)]\!].$$
3. X が **$\underline{\mathcal{R}}$ から見て強零**であるとは，次の条件を満たすことである．
$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})\left(\exists s \in \left(\prod_{n\in\omega} 2^{u(n)}\right)^{\underline{\mathcal{R}}}\right)(\forall m \in \omega) \quad X \subseteq \bigcup_{n\geq m} [\![s(n)]\!].$$

*2 本稿の観点によれば，Π^0_1 集合とは $\mathcal{R}$ で設計された閉集合である．より一般に，細字ボレル階層は $\mathcal{R}$ で設計された太字ボレル階層に相当する．

$\mathcal{SN}^{\mathcal{R}}$ および $\mathcal{SN}^{\underline{\mathcal{R}}}$ をそれぞれ $\mathcal{R}$ および $\underline{\mathcal{R}}$ から見て強零な集合全体とする．$\mathcal{R}$ から見た強零 Π^0_1 集合に属す要素は，以下のように振る舞う．

定理 2.4 (樋口-木原 [26])**.** $\mathcal{SN}^{\mathcal{R}}$ に属す Π^0_1 集合 $Q \subseteq 2^\omega$ を任意に取る．このとき，ある実数 $x \in Q$ が存在して，$(2^\omega)^{\mathcal{R}[x]} \subseteq (\mathcal{SN})^{\mathcal{R}}$ となる．加えて，もし $Q \cap (2^\omega)^{\mathcal{R}} = \emptyset$ ならば，ある実数 $x \in 2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ が存在して，$Q \cap (2^\omega)^{\mathcal{R}[x]} = \emptyset$ となる．

$\mathcal{R}$ から見た強零集合はコルモゴロフ複雑性によって特徴付けられる．コルモゴロフ複雑性の定義から $\mathcal{R}$ への相対化（すなわち計算可能性）を排除することによって，同様に，強零集合の複雑性による特徴付けを与えられる．

定理 2.5 (樋口-木原 [26])**.** $x \in (\mathcal{SN})^{\mathcal{R}}$ であることと，次の式を満たすことは等しい．

$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}) \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{K(x \restriction u(n))}{n} = 0.$$

同様に，賭博ゲームを用いた特徴付けも与えられる．関数 $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}$ が**マルチンゲール** (*martingale*) である ([19, 36]) とは，任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して，$d(\sigma) \geq 0$ かつ $2d(\sigma) = d(\sigma 0) + d(\sigma 1)$ を満たすことである．感覚的には，列 $x \in 2^\omega$ の有限切片 $x \restriction n$ が与えられたとき，次の値 $x(n)$ が何であるかを予測する賭博を表し，マルチンゲールとは，ある列上の賭博ゲームにおける博徒の資金の変動過程を表す．与えられた列 x がランダムであれば，それは規則性を持たないため，次の値を予測不可能であり，博徒は資金 $d(x \restriction n)$ をあまり増やすことが出来ない．逆に，x が規則的な列であれば，博徒は次の値を予測しやすく，$d(x \restriction n)$ を無限大に発散させやすい．以後，MG によってマルチンゲール全体，$\omega^{\uparrow\omega}$ によって非有界かつ非減少な関数全体を表す．

定理 2.6 (樋口-木原 [27])**.** $x \in (\mathcal{SN})^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることと，次の式を満たすことは等しい．

$$(\forall u \in (\omega^{\uparrow\omega})^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists d \in (\mathrm{MG})^{\underline{\mathcal{R}}}) \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{d(x \restriction n)}{2^{n-u(n)}} = \infty.$$

2.3　痩加法的集合

実数 $c \in (2^\omega)^{\mathcal{V}}$ がモデル $\mathcal{W}$ から見てコーエン実数であったとする．このモデル $\mathcal{W}$ にどのような実数 $r \in (2^\omega)^{\mathcal{V}}$ を加えたとき，c は拡大モデル $\mathcal{W}[r]$ から見てコーエン実数でなくなるだろうか．あるいは，そのような実数 r の特徴付けを与えたい．このような問題設定は，ランダム性の理論においては，数列のデランダマイズの研究において，多々なされてきたことであった．今回の設定は，数列のコーエン性の解消の問題と考えられる．

定義 2.2. 実数 $x, y \in 2^\omega$ に対して，$(x+y)(n) \equiv x(n)+y(n) \bmod 2$ と定義し，集合 $X, Y \subseteq 2^\omega$ に対して，$X+Y=\{x+y : (x,y) \in X \times Y\}$ と表す．

1. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ が痩加法的 ([7]) とは，任意の $N \in \mathcal{M}$ に対して，$X+N \in \mathcal{M}$ であることを意味する．
2. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ が $\underline{\mathcal{R}}$ **から見て痩加法的**とは，任意の $N \in \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}$ に対して，$X+N \in \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることである．$\mathcal{M}^{+\underline{\mathcal{R}}}$ によって $\underline{\mathcal{R}}$ から見て痩加法的な集合全体を表す．
3. 集合 $N \subseteq 2^\omega$ が x-相対的に全域 $\underline{\mathcal{R}}$-疎であるとは，ある関数 $F : 2^\omega \to \omega^\omega$ が $\underline{\mathcal{R}}$ に存在して，任意の $y \in 2^\omega$ に対して $F(y)$ は疎閉集合 F_y のボレルコードであり，$N \subseteq F_x$ となることを言う[*3]．このとき，$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ を x-相対的に全域 $\underline{\mathcal{R}}$-疎集合の一様可算列の和として表される集合全体とする．

定理 2.7 (木原-宮部 [30])**.** 任意の実数 $x \in 2^\omega$ に対して，$(\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}} = (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ であること，$x+(\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}} \subseteq (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}}$ であること，および $x \in (\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることはそれぞれ同値である．ここで，実数 $x \in 2^\omega$ と集合 $X \subseteq 2^\omega$ に対して，$\{x\}+X$ を単に $x+X$ と表す．

最初の性質は，x のコーエン解消能力が皆無であることを表す一方で，第二の性質は，逆に，x との和はコーエン化を引き起こさないことを意味する．零閉集合の生成するイデアル $\mathcal{E}$ についても同様の性質が成り立つ．つまり，その意味で，**デランダマイズ**能力が皆無であることと，逆に加法による**ランダマイズ**能力が皆無であることが等価となる．

定理 2.8 (木原-宮部 [30])**.** $x \in (\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることと，次の式を満たすことは等しい．

$$(\forall u \in (\omega^{\uparrow\omega})^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists d \in (\mathrm{MG})^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists h \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall n \in \omega) \quad \frac{d(x \upharpoonright h(n))}{2^{h(n)-u(h(n))}} \geq n.$$

2.4 零加法的集合

実数 $r \in (2^\omega)^{\mathcal{V}}$ がモデル $\mathcal{W}$ から見てランダム実数であったとする．このモデル $\mathcal{W}$ にどのような実数 $s \in (2^\omega)^{\mathcal{V}}$ を加えたとき，r は拡大モデル $\mathcal{W}[s]$ から見てランダム実数でなくなるだろうか．ランダム性の理論の設定下で換言すれば，何らかの意味でランダムな数列が与えられたとき，どのような情報が与えられれば，その数列の規則を捉えられるだろうか．あるいは，何らかのランダム数列の規則を捉えられる（デランダマイズ能力を持つ）情報とは，如何なるものであろうか．先にも見たように，加法とは，ランダマイズお

[*3] 第 3.1 節の言葉で言えば，F が $\underline{\mathcal{R}}$ から見た疎閉集合の設計者であることを意味する．

よびデランダマイズ双方の意味で用いられる．統計的検定 N が与えられたとき，x の情報を付加した新たな検定 $x+N$ を作るというデランダマイズ的な価値もあれば，実数 y が与えられたとき x の情報を付加した新たな実数 $x+y$ を不規則にするというランダマイズ的な価値も持つ．

定義 2.3. 1. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ が零加法的 ([7]) とは，任意の $N \in \mathcal{N}$ に対して，$X+N \in \mathcal{N}$ であることを意味する．

2. 集合 $X \subseteq 2^\omega$ が $\underline{\mathcal{R}}$ **から見て零加法的**とは，任意の $N \in \mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}}$ に対して，$X+N \in \mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることを意味する．$\mathcal{N}^{+\underline{\mathcal{R}}}$ によって $\underline{\mathcal{R}}$ から見て零加法的な集合全体を表す．

3. 集合 $N \subseteq 2^\omega$ が x-相対的に全域 $\underline{\mathcal{R}}$-零であるとは，ある関数 $F : 2^\omega \to \omega^\omega$ が $\mathcal{R}$ に存在して，任意の $y \in 2^\omega$ に対して $F(y)$ は零 G_δ 集合のボレルコードであり，そこから開集合の下降列 $\{U_n^y\}_{n\in\omega}$ で，U_n^y の測度が正確に 2^{-n} であるものが解体され，$N \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n^x$ となることを言う[*4]．このとき，$\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ を x-相対的に全域 $\underline{\mathcal{R}}$-零である集合全体とする．

さて，$\underline{\mathcal{R}}$ の意味で情報 $x \in 2^\omega$ のデランダマイズ能力が皆無であるとは，$\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}} = \mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ あるいは $(\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}} = (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ を意味する．この 2 種類の等式の表す直接の意味は完全に異なるが，その同値性が成立することが知られている．Franklin-Stephan [23] の定理は，上述の意味で $x \in 2^\omega$ のデランダマイズ能力が皆無であることと，$\underline{\mathcal{R}}$ で見て，x が 0 のみからなる無限列と同程度のサイズに圧縮可能であることを述べる．そのような性質は **Schnorr トリビアル** (*Schnorr trivial*) と呼ばれる ([19, Chapter 12])．

定理 2.9 (Franklin-Stephan [23])**.** 実数 $x \in 2^\omega$ に対して，$\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}} = \mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ であること，$(\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}} = (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}[x]}}$ であること，Schnorr トリビアルであること，いずれも同値である．

定理 2.10 (木原-宮部 [30])**.** 実数 $x \in 2^\omega$ が Schnorr トリビアルであることと $x \in (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ であることは同値である．加えて，次の式を満たすこととも等しい．

$$(\forall u \in (\omega^{\uparrow\omega})^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists d \in (\mathrm{MG})^{\underline{\mathcal{R}}}) \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{d(x \upharpoonright n)}{2^{n-u(n)}} = \infty.$$

$\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq \mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}}}$ と $x \in (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ の同値性は，x が非自明なデランダマイズ能力を持つか否かの判定として，加法 $+$ が普遍的検定となっていることを述べる．デランダマイズとしての加法 $+$ という意味を込め，記法を濫用して，$(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}}$ および $(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$ をそれぞれ $\mathcal{N}^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq \mathcal{N}^{\mathcal{R}}$ および $\mathcal{N}^{\mathcal{R}[x]} \subseteq \mathcal{N}^{\mathcal{R}}$ を満たす実数 $x \in 2^\omega$ 全体の集合を意味するものとす

[*4] 第 3.1 節の言葉で言えば，F が $\underline{\mathcal{R}}$ から見た $\mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\underline{\mathcal{R}}}$ の設計者であることを意味する．

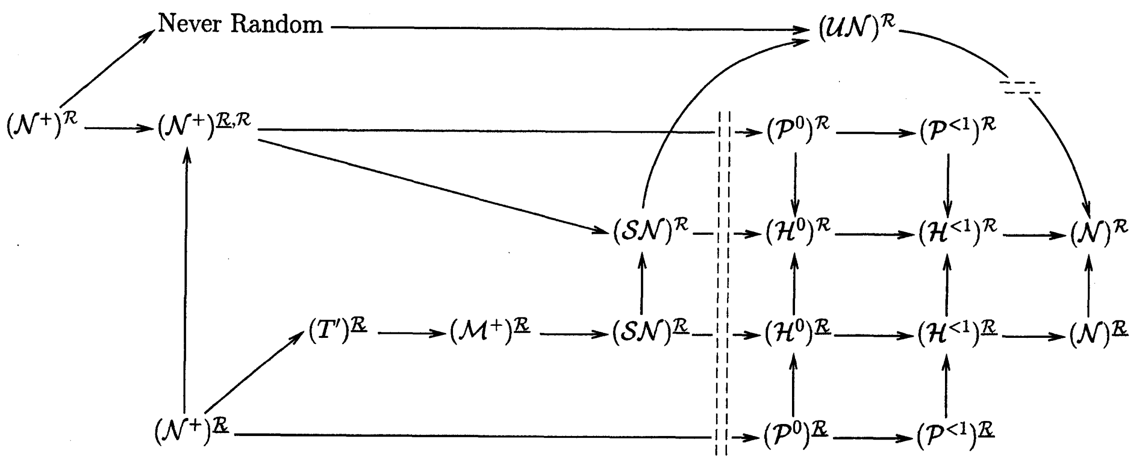

図 1　K-トリビアルから非ランダムに至る階層（零加法的集合から零集合に至る階層）：点線内は省略されているが，この間にも途方もなく長い階層が存在する．

る．次は，$(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}}$ がアンチ・コンプレクス ([20]) と呼ばれる概念で特徴付けられることを示すものである．

定理 2.11 (木原-宮部 [30])**.** $x \in (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}}$ であることと，次の式を満たすことは等しい．

$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}) \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{K(x \restriction u(n))}{n} = 0.$$

定理 2.12 (Nies [35])**.** $x \in (\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$ であることと，次の式を満たすことは等しい．

$$(\exists c \in \omega)(\forall n \in \omega) \quad K(x \restriction n) \leq K(\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ 個}}) + c.$$

言い換えれば，$(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$ は K-トリビアル数全体の集合と正確に一致する．

2.5　K-トリビアルからランダムに至る道程

K-トリビアルとは $K(x \restriction n) \leq K(0^n) + O(1)$ を満たすことであり，**Martin-Löf ランダム**とは $K(x \restriction n) \geq n - O(1)$ を満たすことであった．コルモゴロフ複雑性による式だけを見ても，この 2 つの性質に大きな隔たりがあるようには見えないかもしれない．しかし，図 1 を見れば，K-トリビアル $(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$ と Martin-Löf ランダム $2^\omega \setminus (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ の間に佇む深遠な微細構造の存在は明白であろう．

$\mathcal{R}$ と $\underline{\mathcal{R}}$ の違いは，木原-宮部 [30] によって $(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}} \not\subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ が示されている．一方，木原-宮部 [30] によれば，$(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}} \setminus \mathfrak{d}^{\underline{\mathcal{R}}} \subseteq (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ が成立する．Chaitin は $(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$

の濃度が $\aleph_0$ であることを示しており，Franklin [21] の強制法構成は，任意の $x \in \mathfrak{d}^{\underline{\mathcal{R}}}$ に対して，$y \equiv_T x$ で $y \in (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ なるものが存在することを示しており，これより $(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}} \not\subseteq (\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}}$ である．一方，Franklin [22] が述べるように，$(\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}}} \subseteq (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}}$ かつ $(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}} \not\subseteq (\mathcal{M})^{\mathcal{R}}$ である．また，明らかに $(\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}} \subseteq (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である．よって，$(\mathcal{N}^+)^{\mathcal{R}} \setminus (\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}}$ は弱 1-コーエン実数を含んでいる．一方で，樋口-木原 [27] で言及されたように，$2^\omega \setminus (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}} \subseteq (\mathcal{SN})^{\underline{\mathcal{R}}}$ であり，$(\mathcal{P}^{<1})^{\mathcal{R}} \subseteq (\mathcal{M})^{\mathcal{R}[\emptyset']}$ であるから，十分にコーエンな実数は $(\mathcal{SN})^{\underline{\mathcal{R}}} \setminus ((\mathcal{P}^{<1})^{\mathcal{R}} \cup (\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}})$ に属す．樋口-木原 [27] の優先法から得られる定理 2.14 は，$(\mathcal{M}^+)^{\underline{\mathcal{R}}} \not\subseteq (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}}$ を導く．各ハウスドルフ次元の分離は，Miller [34] の強制法構成による．事実，各次元 $s \in ([0,1))^{\underline{\mathcal{R}}}$ について，ある実数 $x \in (\mathcal{H}^s)^{\mathcal{R}}$ で，$(2^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{H}^{\leq s})^{\mathcal{R}}$ なるものが存在する．この結果と Demuth の定理 [15] を合わせることによって，$(\mathcal{UN})^{\mathcal{R}} \not\subseteq (\mathcal{H}^{<1})^{\mathcal{R}}$ も導かれる．また，Greenberg-Miller [25] は，限部-Lewis 強制法 [33] を用いて，ある実数 $x \in (\mathcal{H}^1)^{\mathcal{R}}$ で，$(2^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ なるものを構成している．

2.6 (T') 集合

Stephen Binns [9] が最初に考案した“小さい”集合概念は，(T') 集合 ([37]) に相当するものであった．集合 $X \subseteq 2^\omega$ に対して，$\mathrm{Br}_X(n)$ によって $\{\sigma \in 2^n : X \cap [\![\sigma]\!] \neq \emptyset\}$ の要素数を表す．各 $n \in \omega$ について，$\mathrm{Br}_X(m) \geq n$ なる最小の $m \in \omega$ を $\mathrm{Br}_X^{-1}(n)$ で表す．集合 $X \subseteq 2^\omega$ が **$\underline{\mathcal{R}}$ から見て** (T') であるとは，任意の $f \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}$ に対して，$\mathrm{Br}_X^{-1} \not\leq^* f$ となることを意味する．$(T')^{\underline{\mathcal{R}}}$ によって $\underline{\mathcal{R}}$ から見て (T') であるような集合全体を表す．(T') 集合のフラクタル的特徴付けは，Zindulka [42] による．

定理 2.13 ([16, 26])**.** $(T')^{\underline{\mathcal{R}}}$ に属す Π^0_1 集合 $Q \subseteq 2^\omega$ を任意に取る．もし $Q \cap (2^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}} = \emptyset$ ならば，任意の $x \in 2^\omega \setminus (\mathcal{M})^{\mathcal{R}}$ に対して，$Q \cap (2^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]} = \emptyset$ である．

定理 2.14 (樋口-木原 [27])**.** $Q \cap (\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}} = \emptyset$ であるような $(T')^{\underline{\mathcal{R}}}$ に属す完全 Π^0_1 集合 $Q \subseteq 2^\omega$ が存在する．

Jockusch-Soare [28] の**超免疫不在基底定理** (*hyperimmune-free basis theorem*) は，任意の Π^0_1 集合 $Q \subseteq 2^\omega$ に対して，$Q \neq \emptyset$ ならば $Q \setminus \mathfrak{b}^{\underline{\mathcal{R}}} \neq \emptyset$ であることを言う．これより，

$$((T'))^{\underline{\mathcal{R}}} \setminus \left((\mathcal{N}^+)^{\underline{\mathcal{R}},\mathcal{R}} \cup \bigcup_{x \notin (\mathcal{M})^{\mathcal{R}}} (2^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \right)$$

は連続体濃度を持ち，さらに $\mathfrak{b}^{\underline{\mathcal{R}}}$ でない実数を含む．

3 基数不変量とデランダマイズ

3.1 ローネスと LR 次数

2^ω の適当なボレルコードの族 B から生成される σ-イデアル $\mathcal{I}_B$ が与えられたとき，部分連続関数 $I :\subseteq 2^\omega \to \omega^\omega$ が **B-設計者**であるとは，任意の $x \in \mathrm{dom}(\Psi)$ に対して $I(x) \in B$ であることを意味する．以後，$(I)_x$ によって $I(x)$ をボレルコードとするボレル集合を表す．I が $\underline{\mathcal{R}}$ に属す全域関数であるとき，それは $\underline{\mathcal{R}}$ における B-設計者と呼ばれ，その全体を $B^{:\underline{\mathcal{R}}}$ と書く．I が $\mathcal{R}$ に属す部分関数であるとき，それは $\mathcal{R}$ における B-設計者と呼ばれ，その全体を $B^{:\mathcal{R}}$ と書く．たとえば σ-イデアル $\mathcal{N}$ を生成する G_δ ボレルコードの族には無数の選択があるが，$\mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{R}}$ として，分解したときに開集合の下降列 $\{U_n\}$ で U_n の測度が 2^{-n} 以下であるものが得られるボレルコード全体，$\mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\underline{\mathcal{R}}}$ として，U_n の測度が正確に 2^{-n} の列が得られるボレルコード全体を選ぶ．

定義 3.1. $\mathcal{W}, \mathcal{W}' \in \{\underline{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\}$ とする．

1. 実数 x が *test-low for $\mathcal{W}$ versus $\mathcal{W}'$ relative to y* ($x \leq_{TL(\mathcal{W},\mathcal{W}')} y$) とは，
$$(\forall H' \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}':\mathcal{R}})(\exists H \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}:\mathcal{R}}) \quad (H')_x \subseteq (H)_y.$$
2. 実数 x が *low for $\mathcal{W}$ versus $\mathcal{W}'$ relative to y* ($x \leq_{L(\mathcal{W},\mathcal{W}')} y$) とは，
$$\bigcup\{(H')_x : H' \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}':\mathcal{R}})\} \subseteq \bigcup\{(H)_y : H \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}:\mathcal{R}})\}.$$
3. 実数 x が *strongly low for B versus C relative to y* ($x \ll_{L(\mathcal{W},\mathcal{W}')} y$) とは，
$$(\exists H \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}:\mathcal{R}})(\forall H' \in \mathcal{N}_{\mathrm{BC}}^{\mathcal{W}':\mathcal{R}}) \quad (H')_x \subseteq (H)_y.$$

$\mathcal{W} = \mathcal{W}' = \mathcal{R}$ のとき，$L(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ を単に LR と書き，$\mathcal{W} = \mathcal{W}' = \underline{\mathcal{R}}$ のとき，$L(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ を $L\mathrm{Sch}$ と書く．$B^{:\mathcal{R}}$ を $B^{:\underline{\mathcal{R}}}$ に変えたとき，上述の概念は *tt-low* あるいは *uniform low* と呼ばれるものになる[*5]．

命題 3.1. $\leq_{TLR}=\leq_{LR}=\ll_{LR}$ が成立する．さらに，$x \leq_{LR} y$ であることは，$(\mathcal{N})^{\mathcal{R}[x]} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}[y]}$ であることと同値である．

[*5] ボレル集合 $H \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ が **$\mathcal{J}$ 集合**である ([6, 7]) とは，任意の $x \in 2^\omega$ に対して $(H)_x \in \mathcal{J}$ を満たすことである．設計者は，x から $(H)_x$ のボレルコードを連続的に返す関数である．集合 $X \subseteq 2^\omega$ が **$SR^{\mathcal{J}}$ 集合**である ([6]) とは，$\bigcup_{x \in X}(H)_x \in \mathcal{J}$ であることを意味する．たとえば実数のローネス ($x \leq_{LR} y$) とは，一点集合 $\{x\}$ が $\mathcal{R}[y]$ で設計された $SR^{\mathcal{N}}$ 集合に捕捉されることである．

$\mathcal{D}_{LR}$ を 2^ω の LR 次数構造とする．LR 次数構造は Nies [35] によって定義され，現在はそれが非自明な代数的性質を持つことが知られている ([1, 4, 5])．

系 3.1 (木原-宮部 [30])**.** 基数不変量と LR 次数構造には次の関係がある．

1. $\mathsf{add}(\mathcal{N}) = \min\{\mathrm{card}(X) : X$ は $\mathcal{D}_{LR}$ で非有界である $\}$;
2. $\mathsf{cof}(\mathcal{N}) = \min\{\mathrm{card}(X) : X$ は $\mathcal{D}_{LR}$ で共終である $\}$.

ところで，$\mathcal{W}$ を ZFC の可算推移的モデルとすると，殆ど全ての $z \in 2^\omega$ に対して，任意の $g \in (\omega^\omega)^{\mathcal{W}[z]}$ に対して $g \leq^* f$ なる $f \in (\omega^\omega)^{\mathcal{W}}$ が存在する．実は，$\mathcal{W}$ を $\underline{\mathcal{R}}$ に置き換えた場合，基底モデルが小さすぎるために，この性質は成り立たない．ZFC の可算推移的の持つ上述の性質を満たすためには，基底モデル $\underline{\mathcal{R}}$ に適当な神託を加えることが必要である．Dobrinen-Simpson [17] によれば，実数 $x \in 2^\omega$ が**殆ど全支配** (*almost everywhere dominating*) とは，殆ど全ての $z \in 2^\omega$ に対して，任意の $g \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[z]}$ に対して $g \leq^* f$ なる $f \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在することである．このような f が g に依存せずに取れるとき，x を**殆ど全一様支配** (*almost everywhere uniformly dominating*) と呼ぶ．

定理 3.1 ([11, 31])**.** 任意の実数 $x \in 2^\omega$ に対して，$x \geq_{LR} \emptyset'$ であることと x が殆ど全支配であることは同値である．加えて，x が殆ど全一様支配であることも同値である．

3.2 スラローム

関数 $h \in \omega^\omega$ が与えられているとき，各関数 $S \in \prod_n [\omega]^{h(n)}$ を ***h*-有界スラローム** (*h-bounded slalom*) と呼ぶ．ω 上の部分関数 T に対して，$S_T(n) = \{T(\langle n, s\rangle) : \langle n, s\rangle \in \mathrm{dom}(T),\ s < h(n)\}$ で定義される関数 $S_T \in \prod_n [\omega]^{h(n)}$ を T から生成される h-有界スラロームと呼ぶ．各関数 $S \in (\prod_n [\omega]^{h(n)})^{\underline{\mathcal{R}}}$ を **$\underline{\mathcal{R}}$ から見た *h*-有界スラローム**と呼ぶ．ある $T \in (\omega^\omega)^{\mathcal{R}}$ から生成される h-有界スラローム S_T を **$\mathcal{R}$ から見た *h*-有界スラローム**と呼ぶ．SL_h を h-有界スラローム全体の集合とし，$h(n) = n$ のとき，単に SL と書く．

実数の集合論では，基数不変量の研究において，スラロームは大きな役割を担っている ([7])．ここでは，ランダム性の理論におけるスラロームの役割について解説する．

定義 3.2 ([19, 36])**.** 1. $x \in 2^\omega$ が**計算トレース可能** (*computably traceable*) とは，

$$(\forall f \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}[x]})(\exists S \in \mathrm{SL}^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall^\infty n \in \omega) \quad f(n) \in S(n).$$

2. $x \in 2^\omega$ が**枚挙トレース可能** (*c.e. traceable*) とは,

$$(\forall f \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}[x]}})(\exists S \in \mathrm{SL}^{\mathcal{R}})(\forall^\infty n \in \omega) \quad f(n) \in S(n).$$

3. $x \in 2^\omega$ が h-**ジャンプトレース可能** (*h-jump traceable*) とは,

$$(\forall f \in (\omega^\omega)^{\mathcal{R}[x]})(\exists S \in \mathrm{SL}_h^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall^\infty n \in \mathrm{dom}(f)) \quad f(n) \in S(n).$$

4. $x \in 2^\omega$ が**強ジャンプトレース可能** (*strongly jump traceable*) とは,

$$(\forall f \in (\omega^\omega)^{\mathcal{R}[x]})(\forall h \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists S \in \mathrm{SL}_h^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall^\infty n \in \mathrm{dom}(f)) \quad f(n) \in S(n).$$

5. $x \in 2^\omega$ が**計算 *tt*-トレース可能** (*computably tt-traceable*) とは,

$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists S \in \mathrm{SL}^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall^\infty n \in \omega) \quad x \upharpoonright u(n) \in S(n).$$

6. $x \in 2^\omega$ が**枚挙 *tt*-トレース可能** (*c.e. tt-traceable*) とは,

$$(\forall u \in (\omega^\omega)^{\underline{\mathcal{R}}})(\exists S \in \mathrm{SL}^{\mathcal{R}})(\forall^\infty n \in \omega) \quad x \upharpoonright u(n) \in S(n).$$

また，上式中の $(\forall^\infty n \in \omega)$ を $(\exists^\infty n \in \omega)$ に変更することによって**無限回トレース可能** (*i.o. traceable*) の概念が導入される．さらに，$(\exists h \in (\omega^{\uparrow\omega})^{\underline{\mathcal{R}}})(\forall k \in \omega)(\exists n \in [h(k), h(k+1)))$ に変更することによって**計算回トレース可能** (*c.o. traceable*) の概念が導入される．

ランダムネスの分野では，2 種類の概念 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ が与えられているとき，実数 $x \in 2^\omega$ が $(\mathcal{S})^{[x]} \subseteq (\mathcal{T})$ という条件を満たすことを *low for $\mathcal{T}$ versus $\mathcal{S}$* と呼ぶ ([19, Chapter 11, 12])．特に，$(\mathcal{N})^{\mathcal{R}[x]} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ を満たすことを *low for randomness* と呼ぶ．これは $x \leq_{LR} \emptyset$ と同値な概念であり，先に見たように K-トリビアル性と同値になる．

定理 3.2. 任意の実数 $x \in 2^\omega$ に対して,

1. ([40]) $(\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が計算トレース可能である．
2. ([32]) $(\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ である． $\iff$ x が枚挙トレース可能である．
3. ([20]) $(\mathcal{N})^{\underline{\underline{\mathcal{R}[x]}}} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が計算 *tt*-トレース可能である．
4. ([23]) $(\mathcal{N})^{\underline{\underline{\mathcal{R}[x]}}} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ である． $\iff$ x が枚挙 *tt*-トレース可能である．
5. ([24]) $(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が無限回計算トレース可能である．
6. ([24]) $(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ である． $\iff$ x が無限回枚挙トレース可能である．
7. ([30]) $(\mathcal{E})^{\underline{\underline{\mathcal{R}[x]}}} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が無限回計算 *tt*-トレース可能である．

8. ([30]) $(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{N})^{\mathcal{R}}$ である． $\iff$ x が無限回枚挙 tt-トレース可能である．
9. ([24]) $(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が計算回計算トレース可能である．
10. ([30]) $(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}[x]}} \subseteq (\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}}$ である． $\iff$ x が計算回計算 tt-トレース可能である．

ここで，$\mathcal{E}$ は 2^{ω} の零閉集合全体から生成される σ-イデアルである．さらに，上記 10 条件の全てについて，情報圧縮（コルモゴロフ複雑性）による特徴付けが存在する ([30])．

上述のスラロームによる特徴付けからも予想できるが，実際，第 3.1 節に述べた内容を注視すれば，たとえば $(\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ は $\underline{\mathcal{R}}$ から見た $\mathbf{add}(\mathcal{N})$ を反映するものであると分かる．同様に，$(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{N})^{\underline{\mathcal{R}}}$ は $\underline{\mathcal{R}}$ から見た $\mathbf{add}(\mathcal{E},\mathcal{N}) = \mathbf{cov}(\mathcal{M})$ であり，$(\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{E})^{\underline{\mathcal{R}}}$ と $(\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}[x]} \subseteq (\mathcal{M})^{\underline{\mathcal{R}}}$ は $\underline{\mathcal{R}}$ から見た $\mathbf{add}(\mathcal{E}) = \mathbf{add}(\mathcal{M})$ である．

一方，$\mathcal{R}$ においてこれらの基数不変量はどのような姿を見せるだろうか．たとえば K-トリビアル性とスラロームの関連性として，以下の性質が知られている．

定理 3.3 ([2, 18])**.** 強ジャンプトレース可能実数は K-トリビアルである．また，任意の K-トリビアル数は，$\sum_n h(n)^{-1} < \infty$ を満たす任意の h に対して，h-ジャンプトレース可能である．一方，$\sum_n h(n)^{-1} < \infty$ を満たす任意の h に対して，h-ジャンプトレース可能であるにも関わらず，K-トリビアルでない実数が存在する．

解析学におけるランダム性の研究から，$\underline{\mathcal{R}}$ や $\mathcal{R}$ だけでなく，様々な観点から見た零集合およびランダム性の研究の重要性も指摘されている．たとえば，実関数の微分可能点に関する Denjoy alternative のランダム性研究から生まれた **Demuth ランダム性** (*Demuth randomness*) などである．近年は，単純な相対化（基底モデル $\underline{\mathcal{R}}$ や $\mathcal{R}$ への神託の付加）では表せないこの種のランダム性に対するデランダマイズも研究されつつある．

問題 1. アルゴリズム的ランダム性の理論では，**Laver 性** (*Laver property*) に相当するトレース可能性概念は考えられていないように見える．Laver 性は，ランダム性の理論として如何なる意味を持つだろうか？

4 結論と展望

本稿は，実数の集合論の種々の概念が，アルゴリズム的ランダム性のある側面の研究に対して如何に相性良く機能するかを解説するものである．事実，スラロームしかり，その他 Cichoń の図式の基本的性質の証明に関しても，$\underline{\mathcal{R}}$ に於いて正常に機能する．一方で，$\mathcal{R}$ に関わる概念を正確に加法性で捉えきれていないことや，$(\mathcal{N}^{+})^{\mathcal{R}}$ の正確なスラローム

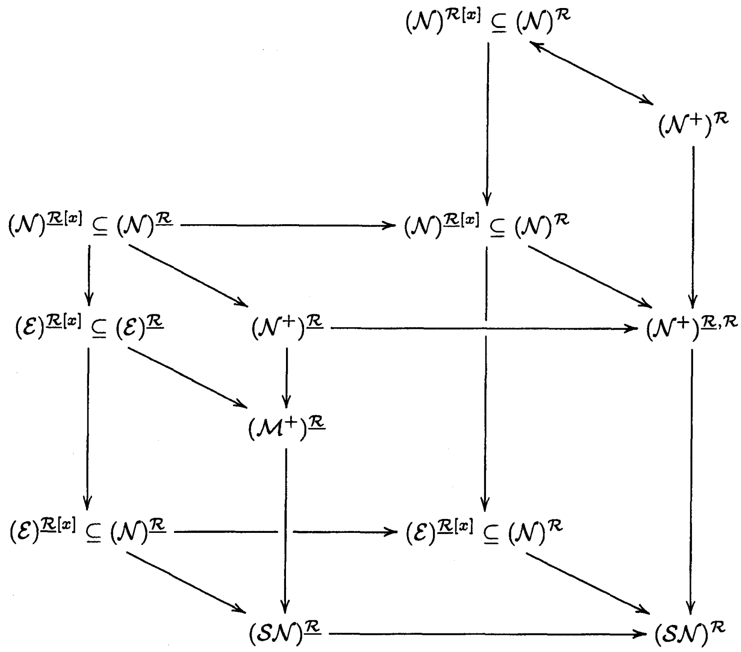

表 1　トレース可能性とローネス

による特徴付けが得られてないことが示唆するように，実数の集合論の道具の多くは $\mathcal{R}$ では真価を発揮できないようである．これは，以下に述べる内容に起因すると想像する．

$\underline{\mathcal{R}}$ の世界は集合論によく似ているが，より計算論的な世界観を反映しているように思える $\mathcal{R}$ は，集合論とは大きく振る舞いが異なる．その最たるものが，普遍的あるいは万能であると呼称される種々の概念の存在である．万能チューリング機械が世に存在することと全く等しい原因によって，例として，$\mathcal{R}$ には，最大の零集合と最大の痩集合が存在する．前者は，**万能 Martin-Löf 検定** (*universal Martin-Löf test*) の名で知られるものである．これが意味するものは，$\mathcal{R}$ では 2^ω が零集合かつ痩集合となるということである．

逆数学 ([39]) の言葉を借りれば，測度論や位相空間論を RCA_0 単独で展開することには無理があり，WWKL_0 や WKL_0 が必要であるという事実に対応する．位相や測度を内包する集合論的世界観を模倣したければ，単項チューリングイデアルの世界ではなく，たとえばスコットイデアルやジャンプイデアルの世界に移住する必要があるだろう．

それでは，$\mathcal{R}$ の研究を放棄すべきかというと，そうとは思えない．万能者の存在するこの計算論的世界観は，集合論の世界観とは異なった，非自明な数学的洞察を与えてくれる．事実，興味深いことに，アルゴリズム的ランダム性の理論の様々な結果が示唆することは，測度論が意味を持たないはずのこの万能者の存在する世界においてさえ，測度論が

正常に機能しているように見えることである．K-トリビアルの研究は，情報圧縮の理論に留まらず，このような反測度論的世界観における測度論的研究の一つのフロンティアとして，重大な価値を持ち得るものだという期待を込めたい．

参考文献

[1] George Barmpalias. Elementary differences between the degrees of unsolvability and degrees of compressibility. *Ann. Pure Appl. Logic*, 161(7):923–934, 2010.

[2] George Barmpalias, Rod Downey, and Noam Greenberg. K-trivial degrees and the jump-traceability hierarchy. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137:2099–2109, 2009.

[3] George Barmpalias, Noam Greenberg, Antonio Montalbán, and Theodore A. Slaman. K-trivials are never continuously random. In *Proceedings of the 11th Asian Logic Conference*, pages 51–58. World Scientific, 2011.

[4] George Barmpalias, Andrew E. M. Lewis, and Mariya Ivanova Soskova. Randomness, lowness and degrees. *J. Symb. Log.*, 73(2):559–577, 2008.

[5] George Barmpalias, Andrew E. M. Lewis, and Frank Stephan. Π^0_1 classes, LR degrees and Turing degrees. *Ann. Pure Appl. Logic*, 156(1):21–38, 2008.

[6] T. Bartoszyński and H. Judah. Borel images of sets of reals. *Real Anal. Exchange*, 20:536–558, 1994/1995.

[7] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A K Peters, 1995.

[8] Laurent Bienvenu and Christopher Porter. Strong reductions in effective randomness. to appear in Theoretical Computer Science, 2012.

[9] Stephen Binns. Small Π^0_1 classes. *Arch. Math. Log.*, 45(4):393–410, 2006.

[10] Stephen Binns. Hyperimmunity in $2^{\mathbb{N}}$. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 48(2):293–316, 2007.

[11] Stephen Binns, Bjørn Kjos-Hanssen, Manuel Lerman, and Reed Solomon. On a conjecture of Dobrinen and Simpson concerning almost everywhere domination. *J. Symb. Log.*, 71(1):119–136, 2006.

[12] Émile Borel. Sur la classification des ensembles de mesure null. *Bull. de la SMF*, 47:97–125, 1919.

[13] Lev Bukovský. *The Structure of the Real Line.* Birkhäuser, 2011. 536 pages.

[14] Adam Day and Joseph S. Miller. Randomness for non-computable measures. to appear, 2012.

[15] Osvald Demuth. A notion of semigenericity. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 28:71–84, 1987.

[16] Osvald Demuth and Antonín Kučera. Remarks on 1-genericity, semigenericity and related concepts. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 28:85–94, 1987.

[17] Natasha Dobrinen and Stephen G. Simpson. Almost everywhere domination. *J. Symb. Log.*, 69(3):914–922, 2004.

[18] Rod Downey and Noam Greenberg. Strong jump-traceability ii: K-triviality. *Israel Journal of Mathematics*, 191(2):647–665, 2012.

[19] Rodney G. Downey and Denis R. Hirschfeldt. *Algorithmic randomness and complexity.* Theory and Applications of Computability. Springer, 2010. 883 pages.

[20] Johanna Franklin, Noam Greenberg, Frank Stephan, and Guohua Wu. Anti-complex sets and reducibilities with tiny use. preprint.

[21] Johanna N. Y. Franklin. Schnorr trivial reals: a construction. *Arch. Math. Log.*, 46(7-8):665–

678, 2008.

[22] Johanna N. Y. Franklin. Schnorr triviality and genericity. *J. Symb. Log.*, 75(1):191–207, 2010.

[23] Johanna N. Y. Franklin and Frank Stephan. Schnorr trivial sets and truth-table reducibility. *J. Symb. Log.*, 75(2):501–521, 2010.

[24] Noam Greenberg and Joseph S. Miller. Lowness for Kurtz randomness. *J. Symb. Log.*, 74(2):665–678, 2009.

[25] Noam Greenberg and Joseph S. Miller. Diagonally non-recursive functions and effective Hausdorff dimension. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43(4):636–654, 2011.

[26] Kojiro Higuchi and Takayuki Kihara. Effective strong nullness and effectively closed sets. In A. Dawar S.B. Cooper and B. Löwe, editors, *How the World Computes*, Lecture Notes in Computer Science 7318, pages 303–312. Springer, 2012.

[27] Kojiro Higuchi and Takayuki Kihara. Effectively closed sets of effectively strongly measure zero. submitted, 2012.

[28] Carl G. Jockusch and Robert I. Soare. Π^0_1 classes and degrees of theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 173:33–56, 1972.

[29] Takayuki Kihara. *Effectively Closed Sets and Degrees of Unsolvability.* PhD thesis, Tohoku University, 2011.

[30] Takayuki Kihara and Kenshi Miyabe. in preparation, 2012.

[31] Bjørn Kjos-Hanssen, Joseph S. Miller, and Reed Solomon. Lowness notions, measure and domination. *J. London Math. Society*, 85(3):869–888, 2012.

[32] Bjørn Kjos-Hanssen, André Nies, and Frank Stephan. Lowness for the class of Schnorr random reals. *SIAM J. Comput.*, 35(3):647–657, 2005.

[33] Masahiro Kumabe and Andrew E. M. Lewis. A fixed-point-free minimal degree. *J. London Math. Soc.*, 80(3):785–797, 2009.

[34] Joseph S. Miller. Extracting information is hard: a Turing degree of non-integral effective Hausdorff dimension. *Advances in Mathematics*, 226(1):373–384, 2011.

[35] Andre Nies. Lowness properties and randomness. *Advances in Mathematics*, 197:274–305, 2005.

[36] Andre Nies. *Computability and Randomness.* Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2009. 433 pages.

[37] Andrzej Nowik and Tomasz Weiss. On the Ramseyan properties of some special subsets of 2^ω and their algebraic sums. *J. Symb. Log.*, 67(2):547–556, 2002.

[38] Jan Reimann and Theodore A. Slaman. Probability measures and effective randomness. preprint, 2007.

[39] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2009. 464 pages.

[40] Sebastiaan Terwijn and Domenico Zambella. Computational randomness and lowness. *J. Symb. Log.*, 66(3):1199–1205, 2001.

[41] Michiel van Lambalgen. Von Mises' definition of random sequences reconsidered. *J. Symb. Log.*, 52(3):725–755, 1987.

[42] Ondrej Zindulka. Small sets of reals through the prism of fractal dimensions. preprint, 2012.